

## UNA NUOVA PROCEDURA PER IL CALCOLO DELLE TENSIONI RESIDUE CON IL METODO DELLA ROSETTA FORATA BASATA SULLA TECNICA DI NEWTON-RAPHSON

G. Petrucci<sup>a</sup>, M. Scafidi<sup>b</sup>

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica (DIMA), Università degli Studi di Palermo, Viale delle Scienze – Edificio 8 – 90128 Palermo,  
e-mail: <sup>a</sup>[petrucci@dima.unipa.it](mailto:petrucci@dima.unipa.it), <sup>b</sup>[scafidi@dima.unipa.it](mailto:scafidi@dima.unipa.it).*

**Parole chiave:** meccanica sperimentale, tensioni residue, estensimetria, metodo del foro

### Abstract

The hole drilling method is one of the most used semi-destructive techniques for residual stress analysis in mechanical parts. In the presence of non-uniform residual stress, the stress field can be determined from the measured relaxed strains using several methods, but the most used one is the so called *integral method*. This method is characterised by some simplifications that lead to approximate results especially when the residual stress varies abruptly. In this paper a new calculation procedure based on the *Newton-Raphson* method for the determination of zeroes of functions is presented. The advantages of the method are also explained and validated by the application to simulated stress fields.

### Sommario

Il metodo della rosetta forata è una delle tecniche semidistruttive più usate per l'analisi delle tensioni residue in componenti meccanici. In presenza di tensioni variabili nello spessore, il campo tensionale può essere valutato a partire dalle deformazioni rilassate utilizzando diversi metodi, il più usato dei quali è il cosiddetto *metodo integrale*. Questo metodo è caratterizzato da alcune semplificazioni che conducono a risultati approssimati. In questo lavoro viene proposta una nuova procedura di calcolo basata sul metodo di *Newton-Raphson* per la determinazione degli zeri di funzioni. Le caratteristiche e i vantaggi del metodo proposto vengono mostrati mediante l'applicazione a stati tensionali simulati.

## Il metodo del foro

Il metodo della rosetta forata è una delle tecniche semidistruttive più usate per l'analisi delle tensioni residue in componenti meccanici [1-3]. Nel caso di tensioni non uniformi nello spessore un foro di raggio pari ad  $R$  viene eseguito in vari passi fino alla profondità massima  $z_M$  e le deformazioni rilassate ai vari passi, misurate mediante una rosetta estensimetrica, vengono registrate e successivamente elaborate per calcolare le tensioni residue.

La relazione tra le deformazioni rilassate e le tensioni è la seguente:

$$p(z) = \int_0^z F(Z, z) P(Z) dZ; \quad z \leq z_M; \quad Z \leq z; \quad (1)$$

nella quale

$$p(z) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2, \quad P(z) = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \quad (2,3)$$

essendo  $\varepsilon_1$ , ed  $\varepsilon_3$  le deformazioni misurate dalle griglie 1 e 3 della rosetta estensimetrica,  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  le tensioni agenti nelle stesse direzioni,  $z$  la profondità corrente del foro,  $Z$  l'ascissa misurata a partire dalla superficie del componente,  $F(Z, z)$ , definita nel campo  $Z \leq z$ , è la *funzione di influenza* che dipende dalla geometria del componente analizzato e dall'insieme foro-rosetta che può essere determinata mediante simulazioni numeriche [4].

Tipicamente la valutazione delle tensioni viene effettuata sino ad una profondità pari alla metà del raggio medio della rosetta  $R_m$ , cioè si ha  $z_M = R_m/2$ . Per misurare la profondità usualmente si utilizza la variabile adimensionale  $h = z/R_m$ .

La determinazione della funzione  $P(z)$  mediante l'eq.(1) costituisce un problema inverso per la cui risoluzione vengono utilizzati diversi metodi approssimati, tra i quali il *metodo integrale* [1], il *metodo delle serie di potenze* [3], il *metodo spline* [5], procedure basate sull'applicazione di metodi di soluzione del problema inverso [6-7]. In ciascuno dei metodi le tensioni  $P(Z)$  vengono approssimate mediante una funzione  $P'(z)$  i cui parametri vengono determinati in modo da minimizzare le differenze tra le deformazioni misurate  $p(z)$  e quelle calcolate mediante la (4):

$$p'(z) = \int_0^z F(Z, z) P'(Z) dZ \quad (4)$$

in corrispondenza ad un numero discreto di valori della profondità  $z_j$  opportunamente scelti, che, in generale, non coincidono con tutti i passi in cui è suddivisa l'esecuzione del foro.

Al fine di fornire una stima qualitativa delle caratteristiche di risoluzione dei metodi basati sulla soluzione del problema inverso rappresentato dall'eq.(1), in fig.1a sono mostrate a confronto, al variare della profondità adimensionale  $h$ , le funzioni  $p(z)$  relative al caso di funzione  $P(z)$  costante nello spessore ( $P(z)=100$  MPa,  $0.0 \leq h \leq 0.5$ ) e al caso della funzione  $P(z)$  mostrata in fig.1b, coincidente con la stessa funzione  $P(z)=100$  MPa per un ampio tratto, ma con una fluttuazione localizzata di valore massimo pari a 20 MPa. Allo stesso modo, in fig.2a sono mostrate a confronto la stessa funzione  $p(z)$  corrispondente al caso di  $P(z)$  costante e la funzione  $p(z)$  relativa al caso della funzione  $P(z)$  mostrata in fig.2b, anche quest'ultima coincidente con la funzione  $P(z)=100$  MPa per un ampio tratto, ma con una fluttuazione nella zona prossima ad  $h=0.5$  di valore massimo pari a 40 MPa. E' possibile vedere come le funzioni  $p(z)$  relative ai casi mostrati nelle fig.1b e 2b risultino quasi coincidenti con la funzione  $p(z)$  del caso di  $P(z)=100$  MPa. Quanto mostrato permette

di affermare che il calcolo delle tensioni residue basato sulla soluzione dell'eq.1, indipendentemente dal metodo utilizzato per la soluzione del problema inverso, difficilmente può essere in grado di stimare fluttuazioni localizzate della funzione di  $P(z)$  di ampiezza ed estensione paragonabili a quelle mostrate nelle fig.1b e 2b, soprattutto in presenza di errori sperimentali, anche limitati, sulle deformazioni. Questi limiti di risoluzione sono particolarmente marcati nella zona  $0.25 < h < 0.5$ .

A riprova di quanto detto, i metodi proposti per la soluzione dell'equazione integrale risultano piuttosto sensibili agli errori sperimentali e le funzioni  $P'(z)$  mediante le quali viene approssimata la funzione incognita  $P(z)$  hanno solitamente limitata variabilità rispetto ad  $h$ .

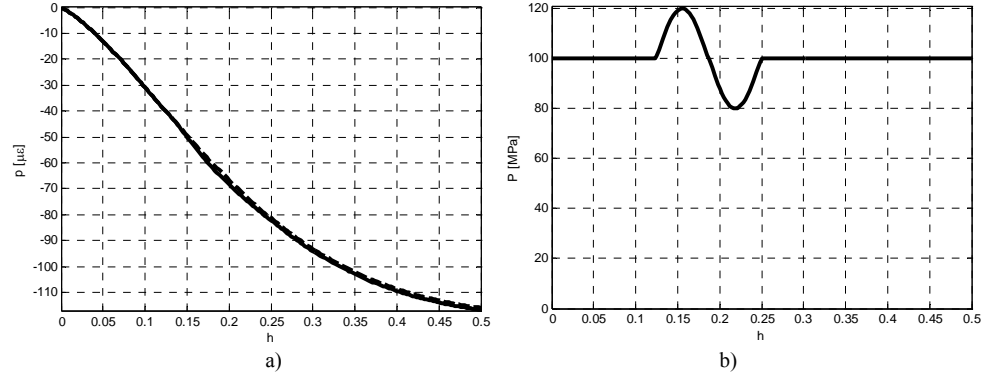


Fig.1 – a) deformazioni  $p(z)$  relative al caso di funzione  $P(z)=100$  MPa e al caso di funzione  $P(z)$  mostrato in fig.1b; b) esempio di funzione  $P(z)$  con variazione localizzata.

Il metodo *integrale* [1-4] si basa sull'assunzione che l'andamento delle tensioni presenti tra due quote  $z_{j-1}$  e  $z_j$  è equivalente ad una tensione uniforme agente su tutto il tratto, cioè si utilizza una funzione  $P'(z)$  con andamento *a gradini*. Il metodo integrale consente di approssimare andamenti di  $P(z)$  di qualunque genere, ma è sensibile agli errori di misura in modo crescente con il numero di passi considerato.

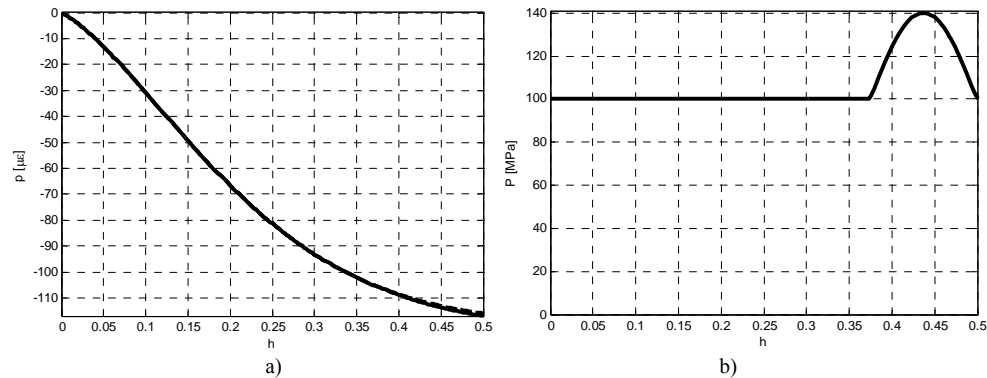


Fig.2 – a) deformazioni  $p(z)$  relative al caso di funzione  $P(z)=100$  MPa e al caso di funzione  $P(z)$  mostrato in fig.2b; b) esempio di funzione  $P(z)$  con variazione localizzata nel tratto finale del foro.

Nel metodo *delle serie di potenze* [3] la funzione approssimante  $P'(z)$  è costituita da un polinomio di grado opportuno, solitamente non superiore a 3. Come detto, i coefficienti del polinomio vengono determinati in modo da minimizzare le differenze tra le deformazioni sperimentali e le deformazioni ottenute con l'equazione integrale (4) in un numero discreto

di valori della profondità  $z_j$ . Questa tecnica risulta meno sensibile all'effetto degli errori sperimentali, ma è efficacemente utilizzabile solo quando le tensioni hanno un andamento pressoché lineare o al più quadratico.

Nel metodo *Spline* [5] la funzione  $P'(z)$  utilizzata è una curva spline costituita da un numero di tratti e di grado assegnati. I coefficienti della spline vengono determinati risolvendo un sistema lineare ottenuto dall'equazione integrale in corrispondenza degli estremi dei tratti della spline.

Come mostrato anche in [5], in ciascuno dei metodi proposti, calcolando le deformazioni  $p'(z)$  mediante la (4), a parte che alle quote  $z_j$  in corrispondenza delle quali sono stati ricavati i parametri delle curve approssimanti, si osserva un certo scostamento rispetto alle deformazioni sperimentali  $p(z)$  esprimibile come:

$$e(z) = p'(z) - p(z) \quad (5)$$

causato del fatto che le tensioni risultano approssimate in ciascun tratto di integrazione.

Recentemente sono stati proposti metodi di risoluzione del problema inverso che, utilizzando la (4), correggono le tensioni in modo da minimizzare lo scarto (5) tra le deformazioni misurate e calcolate [6-7]. Ad esempio in [6] mediante algoritmi genetici si determina il massimo grado e la migliore combinazione delle funzioni con cui approssimare le tensioni in modo da minimizzare una funzione obiettivo che tiene conto dell'incertezza delle misure estensimetriche.

L'idea alla base di questo lavoro è quella di apportare iterativamente delle correzioni alla funzione  $P'(z)$  in modo che le deformazioni calcolate con la (4) rendano minima la differenza tra le deformazioni  $p'(z)$  e  $p(z)$  in tutto il campo, utilizzando il metodo di *Newton-Raphson*.

## Il metodo proposto

Nel metodo proposto la funzione  $P(Z)$  viene approssimata mediante una funzione  $P'(Z)$  costituita da un'insieme di  $n$  polinomi  $P_j(Z)$  di grado  $i_M$  (tipicamente pari a 3), ciascuno dei quali rappresenta la funzione da determinare in un tratto di ascissa limitato  $z_{j-1} < Z < z_j$ , con  $j=1 \div n$ , cioè:

$$P_j(Z) = \sum_{i=0}^{i_M} a_{ij} Z^i, \quad z_{j-1} \leq Z \leq z_j, \quad j = 1 \div n. \quad (6)$$

I coefficienti  $a_{ij}$  nella (6) costituiscono le incognite del problema (1) e la loro determinazione viene effettuata per approssimazioni successive mediante il *metodo di Newton-Raphson (NR)* [8]. È interessante osservare che se  $n=1$  la (6) diventa una serie di potenze simile a quella proposta nel metodo omonimo [3], mentre se  $i_M=0$  la (6) diventa una funzione a gradini simile a quella del metodo integrale, sebbene i risultati ottenuti col metodo proposto in entrambi i casi siano differenti da quelli dei metodi citati. Contrariamente a quanto potrebbe a prima vista sembrare, la (6) non consente di ottenere una funzione spline come accade in [5], in quanto nel metodo proposto non viene assegnata alcuna condizione di continuità ai vari polinomi, a differenza di quanto avviene per i polinomi costituenti una funzione spline.

In pratica il metodo richiede di operare inizialmente la scelta dei seguenti parametri: il numero di polinomi  $n$ , il grado massimo dei polinomi  $i_M$ , le coordinate degli estremi del campo di definizione di ciascun polinomio  $z_j$ , con  $j=0 \div n$ . Nel seguito saranno fornite le indicazioni pratiche per effettuare tali scelte.

Introducendo nella (4) al posto di  $P'(Z)$  i diversi polinomi definiti in (6) si può ottenere la seguente espressione per le deformazioni  $p'(z)$ :

$$p'(z) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{i_M} a_{ik} I_{ik}(z), \quad (7)$$

nella quale

$$I_{ik}(z) = \int_{z_{k-1}}^{z_k} F(Z, z) Z^i dZ. \quad (8)$$

In generale la quota  $z$  alla quale si valuta la funzione  $p'(z)$  si trova all'interno dell'intervallo di esistenza di uno dei polinomi (6), cioè, si ha  $z_{k-1} \leq z \leq z_k$  con  $z_k \leq z_M$ . Poiché l'integrale (4) è esteso da  $Z=0$  a  $z$ , l'indice della prima sommatoria parte, ovviamente, dal valore  $k=1$ , coinvolgendo nel calcolo di  $p'(z)$  tutti i polinomi  $P_k(Z)$  per i quali si verifica  $z_k \leq z$ . La sommatoria è estesa per semplicità di notazione ed implementazione fino a  $k=n$ , cosa che implicherebbe che l'integrazione (4) sia sempre estesa fino alla profondità massima  $z_M > z$ . Affinché non vengano introdotti errori, la funzione  $F(Z, z)$  deve essere preventivamente posta a zero per  $Z > z$ , nonostante essa perda di significato fisico in tale campo.

La funzione  $e(z)$  definita in (5), a sua volta, può essere riscritta come

$$e(z) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{i_M} a_{ik} I_{ik}(z) - p(z). \quad (9)$$

Per ciascuno degli  $n$  polinomi che costituiscono la funzione  $P'(Z)$ , può essere definita la seguente funzione errore le cui variabili sono costituite dai coefficienti  $a_{ij}$ :

$$E_j = \int_{z_{j-1}}^{z_j} e(z)^2 dz = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{i_M} a_{ik} I_{ik}(z) - p(z) \right]^2 dz \quad (10)$$

e la cui minimizzazione consente di ottenere i valori ottimali dei coefficienti.

I coefficienti  $a_{ij}$  che rendono minima la funzione errore (10) possono essere ottenuti mediante il metodo di *NR* [8], che, in generale, consente di valutare mediante approssimazioni successive, gli zeri di una funzione. In questo caso, i coefficienti  $a_{ij}$  cercati sono gli zeri della *derivata* della funzione  $E_j$  rispetto ad  $a_{ij}$ , in corrispondenza dei quali la funzione  $E_j$  stessa assume il valore minimo.

In particolare, il metodo di *NR* permette di ottenere le correzioni da assegnare ai valori degli zeri (in questo caso i coefficienti  $a_{ij}$ ) in ciascuna iterazione mediante la seguente relazione:

$$\Delta \mathbf{a}_j = -\mathbf{J}_j \mathbf{H}_j^{-1}, \quad (11)$$

nella quale  $\mathbf{J}_j$  ed  $\mathbf{H}_j$  sono rispettivamente lo Jacobiano e l'Hessiano della funzione  $E_j$  rispetto ai coefficienti  $a_{ij}$ .

Per il  $j$ -mo polinomio, gli elementi dello Jacobiano sono costituiti dalle derivate parziali della funzione  $E_j$  rispetto alle variabili  $a_{ij}$ :

$$\mathbf{J}_{ji} = \frac{\partial E_j}{\partial a_{ij}} \quad i=1, 2, \dots, i_M \quad (12)$$

Ricordando la (9) e la (10), la (12) può essere riscritta come

$$\mathbf{J}_{\mathbf{j}_i} = 2 \int_{z_{j-1}}^{z_j} e(z) \frac{\partial e(z)}{\partial a_{ij}} dz = 2 \int_{z_{j-1}}^{z_j} e(z) \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{i_M} a_{ik} I_{ik}(z) - p(z) \right] dz. \quad (13)$$

Poiché nella (13) i coefficienti  $a_{ij}$  compaiono al primo grado, essa si riduce a:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{j}_i} = 2 \int_{z_{j-1}}^{z_j} e(z) I_{ij}(z) dz, \quad (14)$$

essendo le funzioni  $I_{ij}(z)$  definite nella (8).

A loro volta gli elementi della matrice Hessiana sono costituiti dalle derivate doppie e miste della funzione  $E_j$  rispetto alle variabili  $a_{ij}$ :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{j}_{is}} = \frac{\partial^2 E_j}{\partial a_{ij} \partial a_{sj}} = \frac{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{j}_i}}{\partial a_{sj}}. \quad i=1,2,..i_M; s=1,2,..i_M \quad (15)$$

Operando come nel caso precedente, gli elementi della matrice Hessiana possono essere ottenuti semplicemente come:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{j}_{is}} = 2 \int_{z_{j-1}}^{z_j} I_{ij}(z) I_{sj}(z) dz. \quad (16)$$

In definitiva, fissato il numero  $n$  di polinomi da utilizzare, il grado dei polinomi  $i_M$  e le coordinate  $z_j$  degli estremi dei campi di definizione dei polinomi, la procedura per il calcolo dei coefficienti  $a_{ij}$  consiste nei seguenti passi:

1. si calcolano le funzioni  $I_{ij}(z)$  mediante la (8);
2. si assegnano dei valori  $a_{ij}$  di primo tentativo, tipicamente pari a 0;
3. si effettua un procedimento iterativo per il calcolo dei coefficienti  $a_{ij}$  per ogni polinomio  $P_j$ , costituito dai seguenti passi:
  1. si calcolano le funzioni  $e(z)$  ed  $E_j$  mediante le (9) e (10); se il valore di  $E_j$  o la variazione di  $E_j$  rispetto al passo precedente risulta inferiore ad un valore molto piccolo prestabilito l'iterazione si interrompe;
  2. si calcolano gli elementi dello Jacobiano e dell'Hessiano mediante la (14) e la (16);
  3. si calcolano le correzioni da assegnare ai coefficienti mediante la (11);
  4. si valutano i nuovi valori dei coefficienti  $a_{ij}$  incrementando quelli del passo precedente mediante le correzioni (11).

La convergenza del procedimento è rapidissima anche partendo da valori iniziali dei coefficienti pari a 0.

### Verifica del metodo e discussione

Allo stato attuale la verifica del metodo è stata effettuata utilizzando stati tensionali simulati di vario tipo. In particolare, con riferimento alle sole simulazioni presentate in questo lavoro:

1. sono state simulate le funzioni  $P(z)$  relative allo stato tensionale tipico della pallinatura [6] e ad uno stato tensionale variabile linearmente nello spessore agenti in un

- componente meccanico in acciaio ( $E=200$  GPa,  $\nu=0.3$ ), simulando la presenza di una rosetta estensimetrica di *tipo A* con  $R_m=2.565$  mm [10] e raggio del foro  $R=0.4 R_m$ ;
- sono state calcolate le deformazioni corrispondenti  $p(z)$  mediante la (1), utilizzando le funzioni d'influenza riportate in [9];
  - le deformazioni  $p(z)$  calcolate sono state introdotte nella (1) come termine noto del problema inverso che è stato risolto sia con il metodo proposto che con il metodo integrale;
  - per i due casi, alle funzioni  $p(z)$  sono stati sommati degli errori di tipo casuale aventi scarto quadratico medio paragonabile a quello degli errori tipicamente riscontrati sulle deformazioni sperimentali e si è operato su di esse in modo analogo al punto 3;
  - le funzioni  $p(z)$  contenenti gli errori casuali sono state approssimate mediante funzioni del tipo *smoothing spline* in modo da simulare una tipica elaborazione delle deformazioni misurate in presenza di errori sperimentali e si è operato su di esse in modo analogo al punto 3.

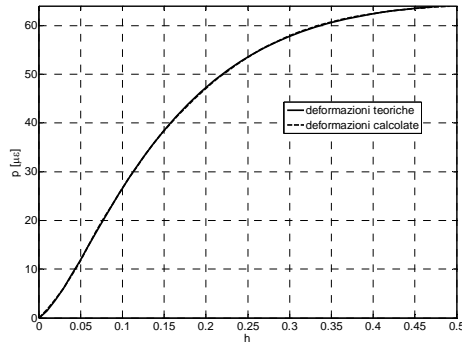


Fig. 3 – Deformazioni  $p(z)$  relative allo stato tensionale di fig. 4.

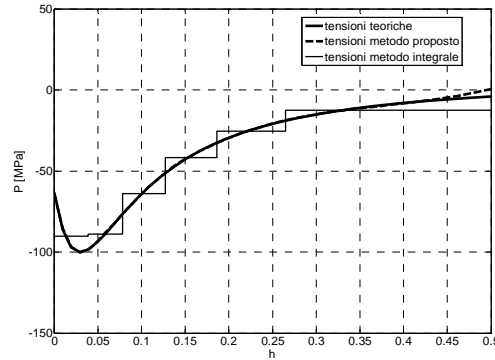


Fig. 4 – Funzione  $P'(z)$  simulata, relativa al caso della pallinatura.

In fig. 3 sono mostrate le deformazioni  $p(z)$  simulate a partire dallo stato tensionale mostrato in fig. 4, tipico della pallinatura. In fig. 4 sono mostrate la funzione  $P(z)$  teorica e le funzioni  $P'(z)$  ottenute con il metodo proposto, utilizzando  $n=3$  polinomi di grado  $i_M=3$ , e l'analogha funzione a gradini ottenuta con il metodo integrale. Per il metodo integrale sono stati utilizzati 6 passi di calcolo ottimizzati secondo quanto suggerito in [11], mentre nel metodo proposto, i 3 polinomi sono stati definiti nei campi delimitati dalle ascisse  $z_0=0$ ,  $z_1=0.075$ ,  $z_2=0.15$ ,  $z_3=0.5$ .

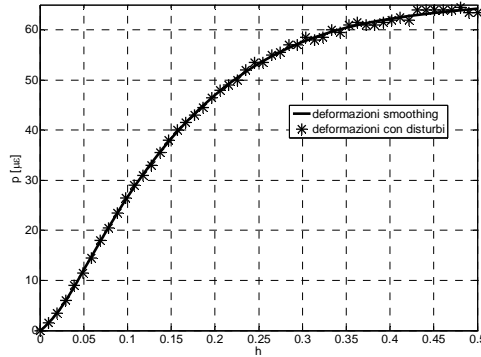


Fig. 5 – Deformazioni con disturbi simulati e funzione smoothing spline.

In pratica, in questo caso ottimale, il risultato ottenuto col metodo proposto è coincidente con quello teorico, mentre il metodo integrale, sebbene fornisca un risultato più che accettabile, presenta il classico comportamento a gradini.

In fig. 5 sono mostrate le deformazioni ottenute da quelle mostrate in fig. 3 sommando errori di tipo aleatorio con

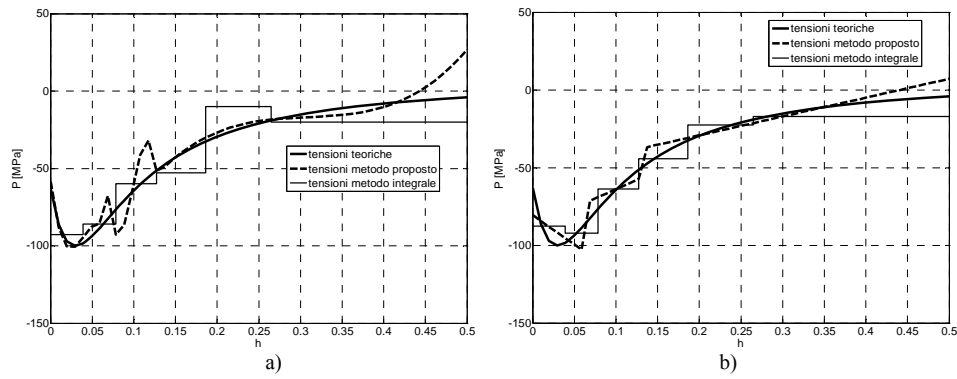


Fig.6 – Funzione  $P'(z)$  per il caso della pallinatura ottenuta in presenza di errori sulle deformazioni. a) caso di  $n=3$ ,  $i_M=3$ ; b) caso di  $n=3$ ,  $i_M=1$ .

varianza pari al 3% del valore della deformazione teorica, arrotondando a  $0.5 \mu\epsilon$  per simulare la risoluzione dello strumento di misura estensimetrico, e la funzione smoothing spline da esse ottenuta. Utilizzando direttamente le deformazioni affette da errore con il

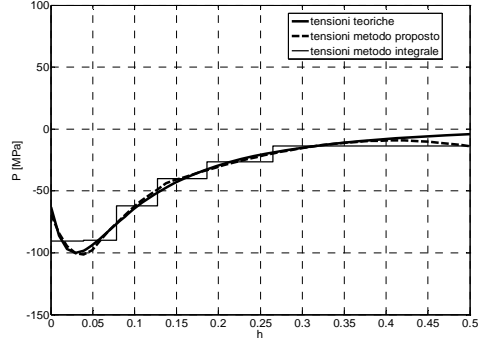


Fig.7 – Funzione  $P'(z)$  per il caso della pallinatura ottenuta utilizzando la smoothing spline.

metodo proposto ed il metodo integrale si ottengono le funzioni  $P'(z)$  mostrate in fig.6a. In pratica il polinomio centrale del metodo proposto presenta delle oscillazioni indesiderate. In fig.4b è mostrato il risultato ottenuto utilizzando 3 segmenti di retta, cioè polinomi di grado  $i_M=1$ : abbassando il grado dei polinomi il risultato torna ad essere soddisfacente. Approssimando le deformazioni mediante la smoothing spline mostrata in fig.5, i risultati tornano ad essere pienamente soddisfacenti, come mostrato in fig.7.

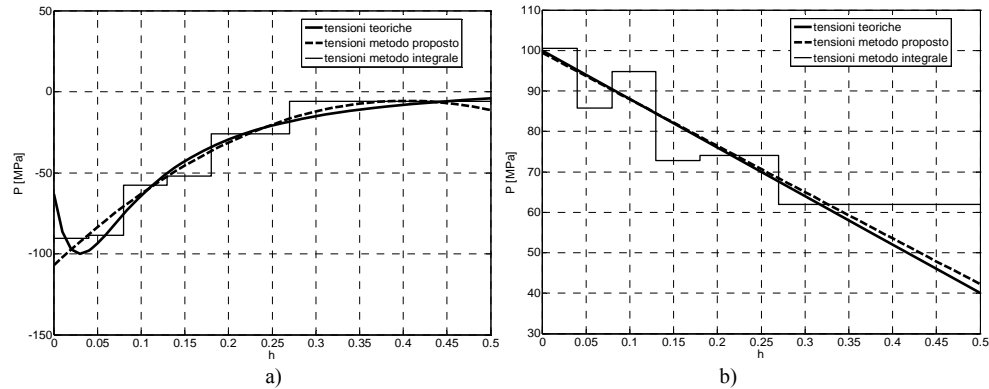


Fig.8 – Funzione  $P'(z)$  ottenuta con un unico polinomio di grado 2 ( $n=1$  e  $i_M=2$ ): a) il caso della pallinatura, b) il caso di tensioni variabili linearmente nello spessore.

Confrontando i risultati ottenuti nei casi di deformazioni esenti da errori e affette da errori è possibile osservare che, analogamente agli altri metodi presenti in bibliografia, il metodo proposto è sensibile agli errori sperimentali. Come spiegato nel precedente paragrafo, ciò è dovuto al fatto che l'eq.(1) presenta intrinsecamente tale sensibilità. A



conferma di quanto precedentemente osservato, la sensibilità risulta crescente al crescere dei parametri  $n$  ed  $i_M$  e risulta differente in zone differenti del campo  $h$ , in particolare è accentuata nella zona  $0.3 < h < 0.5$ . In conseguenza di quanto detto è opportuno: a) limitare il numero di polinomi, cioè utilizzare  $n \leq 4$ , tipicamente  $n=3$ , b) utilizzare polinomi di grado massimo  $i_M=3$ , c) rendere l'intervallo dell'ultimo polinomio sufficientemente esteso, cioè che sia  $z_{n-1} < 0.4h_{max}$ , tipicamente  $0.25h_{max} \leq z_{n-1} \leq 0.35h_{max}$ .

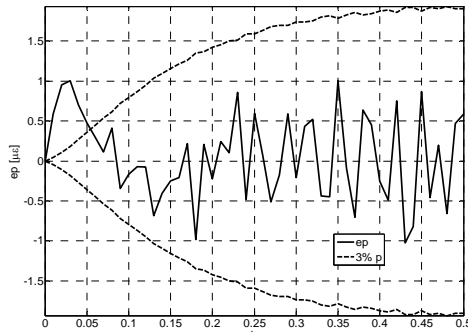


Fig. 9 – Errore percentuale tra le deformazioni  $p(z)$  e le deformazioni  $p'(z)$  per il caso di pallinatura ( $n=1$  e  $i_M=2$ ).

tratto iniziale per il caso di pallinatura. In fig. 9 è mostrato l'errore percentuale tra le deformazioni  $p(z)$  e le deformazioni  $p'(z)$  calcolate con la (4) in tale caso. E' possibile notare come la differenza risulti superiore al 3% nella zona nella quale la funzione  $P'(z)$  si distacca dalla  $P(z)$ . Questa valutazione permette di controllare la precisione ottenuta con questa particolare modalità di applicazione del metodo proposto.

Un'ulteriore possibilità di utilizzazione del metodo proposto riguarda l'impiego di una funzione a gradini come quella del metodo integrale, cioè l'utilizzazione di polinomi di grado  $i_M=0$ . In questo caso è opportuno scegliere valori  $z_j$  corrispondenti ai passi ottimizzati del metodo integrale [11]. In fig. 10 è mostrato il risultato ottenuto per il caso della pallinatura (fig. 10a) e per il caso di tensioni variabili linearmente (fig. 10b). E' facile osservare come i risultati siano nettamente superiori a quelli del metodo integrale. La maggiore precisione è dovuta al fatto che il metodo proposto tiene conto delle deformazioni misurate sull'intero tratto considerato, mentre il metodo integrale si basa esclusivamente sulla deformazione misurata alla fine del passo di foratura.

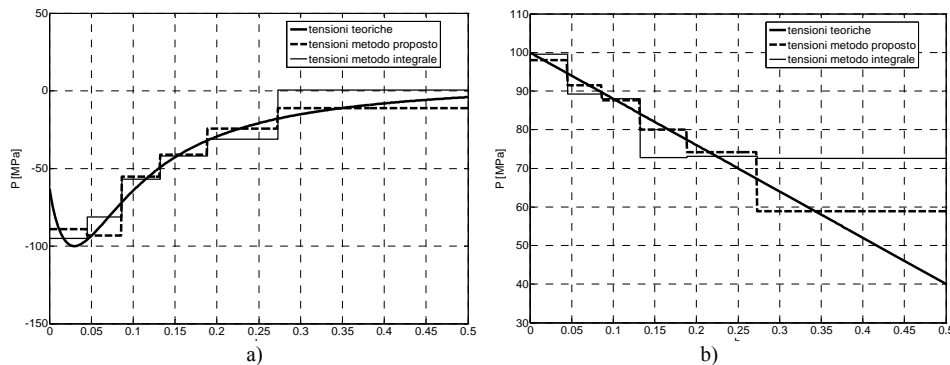


Fig. 10 – Funzione  $P(z)$  ottenuta con polinomi di grado  $i_M=0$ : a) il caso della pallinatura, b) il caso di tensioni variabili linearmente nello spessore.

Nel seguito vengono presentati risultati ottenibili con il metodo proposto utilizzando deformazioni affette da errore, abbassando opportunamente i parametri  $n$  ed  $i_M$ .

Ponendo  $n=1$ , tutta la funzione  $P'(z)$  viene approssimata da un unico polinomio. In fig. 8 sono mostrati i risultati ottenuti utilizzando un unico polinomio di grado  $i_M=2$ ; in particolare, in fig. 8a è mostrato il caso di tensioni residue di pallinatura, mentre in fig. 8b è mostrato il caso di stato di tensionale con andamento lineare. L'approssimazione ottenuta è piuttosto buona in entrambi i casi. Fa eccezione il

## Conclusioni

In questo lavoro è stata presentata una tecnica di elaborazione delle deformazioni sperimentali per la determinazione delle tensioni residue variabili nello spessore col metodo della rosetta forata. Essa è basata sull'approssimazione della funzione delle tensioni mediante un opportuno numero di polinomi di grado opportuno. I coefficienti dei polinomi sono ottenuti con il metodo iterativo di *Newton-Raphson*, minimizzando la differenza tra le deformazioni sperimentali e le deformazioni calcolate a partire dalle tensioni ottenute.

Il metodo risulta di implementazione più semplice rispetto al metodo spline e più preciso rispetto al metodo integrale e al metodo della serie di potenze.

Una verifica preliminare del metodo è stata effettuata mediante simulazione. In particolare sono stati considerati diversi stati tensionali simulando le relative funzioni di deformazione utilizzate come dato di ingresso del metodo. Le verifiche sono state effettuate sia utilizzando direttamente le deformazioni ottenute, sia sommando a queste ultime degli errori aleatori paragonabili ai tipici errori estensimetrici sperimentali, sia approssimando le deformazioni affette da errore con funzioni smoothing spline.

Operando su dati esenti da errori il metodo fornisce risultati praticamente esatti, almeno nei limiti intrinseci dell'equazione integrale di cui costituisce la soluzione.

Operando su dati affetti da errore è possibile ottenere risultati in genere migliori di quelli ottenibili con i metodi esistenti, soprattutto utilizzando funzioni a gradino come quelle del metodo integrale o singoli polinomi di secondo grado.

Operando sulle deformazioni approssimate mediante funzioni smoothing spline, i risultati ottenuti nei casi simulati fino ad ora appaiono molto incoraggianti.

Il metodo è suscettibile di ulteriori miglioramenti, la cui natura non viene qui descritta per motivi di brevità, che sono attualmente in fase di studio.

## Bibliografia

- [1] Bijak-Zochoski, M., *A semi-destructive method of measuring residual stresses*, VDI-Berichte, 313, 469-476, (1978)
- [2] Flaman M.T., Manning B. H., *Determination of residual-stress variation with depth by the hole-drilling method*, Experimental mechanics, 25(3), (1985)
- [3] Schajer, G.S., *Measurement of non-uniform residual stresses using the hole-drilling method. Part. I and Part.II*, J. of Eng. Mat. and Tech., 110(4), 38-343, (1988)
- [4] Schajer G.S., *Application of Finite Element Calculations to Residual Stress Measurement*, J. of Eng. Mat. and Tech., 103 (2), pp.157-163, (1981)
- [5] Petrucci G., Zuccarello B., *A New Method for Non-uniform Residual Stresses Analysis Using the Hole Drilling Technique*, J. of Strain Analysis, vol.33, n.1, pp.27-37, (1997)
- [6] Beghini M., Bertini L., Rosellini W., *Applicazione di algoritmi genetici nella misura di autotensioni variabili nello spessore*, XXVIII Convegno nazionale AIAS, (1999).
- [7] Schajer G. S., Prime M. B., *Use of inverse solutions for residual stress measurements*, Journal of engineering materials and technology, 128, (2006).
- [8] Hoffman J. D., *Numerical methods for engineers and scientists*, Marcel Dekker Inc, New York, (2001).
- [9] Beghini M., Bertini L., *Analytical expression of the influence function for accuracy and versatility improvement in the hole-drilling method*, J. of Strain Anal., 35, (2000)
- [10] *ASTM E837-01 Standard test method for determining residual stresses by the hole-drilling strain-gage method*, ASTM International, (2001)
- [11] Zuccarello B., *Optimal calculation steps for the evaluation of residual stress by the incremental hole-drilling method*, Experimental mechanics, 39(2), (1999).